



TITLE:

# Bottcher関数の構成によるJulia集合の可視化 (数式処理研究の新たな発展)

AUTHOR(S):

吉田, 怜史; 藤村, 雅代; 後藤, 泰宏

---

CITATION:

吉田, 怜史 ...[et al]. Bottcher関数の構成によるJulia集合の可視化 (数式処理研究の新たな発展). 数理解析研究所講究録 2011, 1759: 85-98

ISSUE DATE:

2011-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171331>

RIGHT:

# Böttcher 関数の構成による Julia 集合の可視化

## On the construction of Böttcher functions and visualization of Julia sets

吉田 怜史

SATOSHI YOSHIDA

防衛大学校 理工学研究科

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING, NATIONAL DEFENSE ACADEMY \*

藤村 雅代

MASAYO FUJIMURA †

防衛大学校 数学教育室

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NATIONAL DEFENSE ACADEMY ‡

後藤 泰宏

YASUHIRO GOTOH

防衛大学校 数学教育室

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NATIONAL DEFENSE ACADEMY §

### Abstract

本稿では Julia 集合の描画アルゴリズム及びその応用について述べる. Y. Fisher により導入された Böttcher の定理による無限遠点の吸引鉢から単位円板の外側への等角写像を利用した距離限界法と呼ばれるアルゴリズムの有効性について述べ, Böttcher 写像に収束する等角写像列への応用, さらに高次多項式や非連結な Julia 集合への応用例を紹介する.

### Abstract

DEM (Distance Estimate Method) is an algorithm that draws the connected Julia set for quadratic maps  $P_c(z) = z^2 + c$  introduced by Y. Fisher. We construct revision DEM that can apply for the sequence of conformal maps  $\varphi_n$ , which converges to the Böttcher map  $\varphi$ , and for disconnected Julia set. We implement these algorithms to Risa/Asir.

## 1 はじめに

Y. Fisher による距離限界法と呼ばれる 2 次多項式の連結な Julia 集合を描画するアルゴリズムを紹介するとともに, その応用について述べる. このアルゴリズムは Julia 集合の点そのものではなく, Julia 集合の

\*em49033@nda.ac.jp

†The second author is partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 22540240.

‡masayo@nda.ac.jp

§gotoh@nda.ac.jp

$\varepsilon$ -近傍を描画するため、特に内点を持たない充填 Julia 集合を鮮明に描画することが可能である。さらに、このアルゴリズムにおける無限遠点の吸引鉢の任意の点から Julia 集合までの距離の評価式を、Böttcher 写像に収束する等角写像族に応用し、対応する『Julia 集合族』の鮮明な描画を試みる。また、2 次多項式の連結な Julia 集合の描画アルゴリズムを、非連結な Julia 集合及び高次多項式の Julia 集合に応用し、高次多項式の場合も等角写像族について同様な考察をする。

2 章では今回紹介する距離限界法と呼ばれる 2 次多項式の連結な Julia 集合のアルゴリズムの構成に必要な定義及び諸結果を紹介する。3 章では具体的なアルゴリズムの構成方法について紹介し、数式処理システム Risa/Asir で実装を行う。4 章では、距離限界法を応用し、Böttcher 写像に収束する等角写像族の構成を行う。さらに非連結な Julia 集合及び高次多項式の Julia 集合の描画を行う。

## 2 準備

まずは今回用いる複素力学系の用語の定義及び諸結果の紹介を行う。この章の詳しい内容については [1], [2], [3] 及び [4] を参考にされたい。

有理関数  $R$  について、 $R$  による  $n$  回の反復合成を  $R^n = \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_n$  と表記する。また、 $R(z_0) = z_0$  となる点  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  を不動点、 $R^N(z_0) = z_0$  (周期:  $N \in \mathbb{N}$ ) となる点  $z_0$  を周期点という。周期点における微分係数  $\lambda = (R^N)'(z_0)$  を乗法因子と呼び、周期点は乗法因子  $\lambda$  の値によって以下の 4 つに分類される。本稿では特に超吸引周期点に関する考察を行う。

- $|\lambda| > 1$  のとき  $z_0$  を反発周期点
- $|\lambda| = 1$  のとき  $z_0$  を放物周期点
- $|\lambda| < 1$  のとき  $z_0$  を吸引周期点
- $|\lambda| = 0$  のとき  $z_0$  を超吸引周期点

**吸引鉢** 点  $z_0$  が有理関数  $R$  における吸引周期点または超吸引周期点であるとき、 $R$  による反復合成により周期的に、 $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  に収束する点の集合を  $z_0$  の吸引鉢と呼び、 $A(z_0)$  と表記する。

$$A(z_0) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{周期的に } R^n(z) \rightarrow z_0\}.$$

**正規族** 領域  $D \subset \hat{\mathbb{C}}$  で定義され、 $\hat{\mathbb{C}}$  に値を持つ関数からなる空でない族  $\mathcal{F}$  が正規族 (normal family) であるとは、 $\mathcal{F}$  の元からなる任意の関数列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  をとれば、その中に必ず  $D$  上で広義一様収束する部分列がとれることである。

複素力学系において正規族の理論は、次に紹介する Fatou 集合及び Julia 集合の研究において、重要な役割を果たす。

**Fatou 集合** 有理関数  $R$  の反復合成による族が正規族になるような点  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  の集合を  $R$  の Fatou 集合と定義し  $F(R)$  と表記する。

**Julia 集合** Fatou 集合の補集合  $J(R) = \hat{\mathbb{C}} \setminus F(R)$  を Julia 集合と呼ぶ。Julia 集合の性質として以下のものが知られている。

- $J(R) = J(R^n)$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- $J(R)$  は孤立点を持たない閉集合.
- $J(R) = R(J(R)) = R^{-1}(J(R))$  ( $J(R)$  の完全不変性).

- $J(R) \neq \phi$ .
- $J(R)$  は反発周期点の閉包.

以降については、有理関数  $R$  は多項式の場合に限定して議論する. 多項式において無限遠点は常に超吸引不動点である. さらに任意の吸引鉢は Fatou 集合の部分集合であり, 無限遠点の吸引鉢の境界は Julia 集合である. 以下しばらくは 2 次多項式を扱う. 任意の 2 次多項式は, ある  $c \in \mathbb{C}$  で  $P_c(z) = z^2 + c$  と共役となるので,  $P_c(z) = z^2 + c$  の形の 2 次多項式について考えれば十分である.

ここからは距離限界法と呼ばれる 2 次多項式の連結な Julia 集合の描画アルゴリズムの構成に必要な諸結果について紹介する.

**Köbe の  $\frac{1}{4}$  円定理**  $f: D \rightarrow \Omega$  が平面領域間の等角写像であり,  $z_0 \in D$  のとき, 次が成り立つ.

$$\frac{1}{4}|f'(z_0)|d(z_0, \partial D) \leq d(f(z_0), \partial \Omega) \leq 4|f'(z_0)|d(z_0, \partial D).$$

**Böttcher の定理**  $J(P_c)$  が連結なとき, 次を満たす等角写像  $\varphi: A(\infty) \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \{|z| \leq 1\}$ , が存在する.

$$\varphi(P_c^n(z)) = \varphi(z)^{2^n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ただし, 等角写像  $\varphi(z)$  は  $\varphi_n(z) = (P_c^n(z))^{\frac{1}{2^n}}$  とするとき,  $\varphi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z)$  で与えられる.

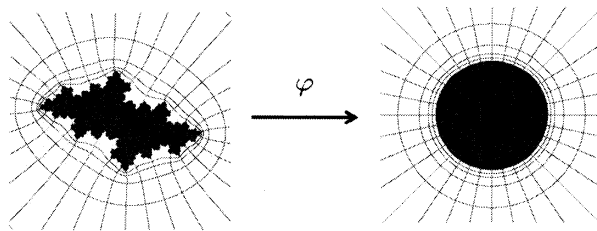


図 1: Böttcher 写像  $\varphi$  は  $A(\infty)$  から単位円板の外への等角写像になっている.

### 3 Y. Fisher のアルゴリズム

前述の諸結果を用いて無限遠点の吸引鉢  $A(\infty)$  上の点から Julia 集合までの距離の評価式を導出し, 距離限界法と呼ばれる 2 次多項式の Julia 集合が連結な場合の描画アルゴリズムを紹介する. このアルゴリズムは Y. Fisher によるものである ([5] 参照).

無限遠点の吸引鉢  $A(\infty)$  の任意の点から Julia 集合までの距離の評価は, 等角写像  $\varphi$  を等角写像  $\varphi_n$  で近似し, さらに  $\varphi_n$  に Köbe の  $\frac{1}{4}$  円定理を用いることで得られる. 具体的には, 次のようになる. 等角写像  $\varphi$  は  $A(\infty)$  から単位円板の外部への写像であるから, Köbe の  $\frac{1}{4}$  円定理より,

$$\frac{1}{4}|\varphi'(z)|d(z, J(P_c)) \leq d(\varphi(z), \partial(\varphi(A(\infty)))) = |\varphi(z)| - 1 \leq 4|\varphi'(z)|d(z, \partial J(P_c)).$$

ゆえに,

$$\frac{1}{4|\varphi'(z)|}(|\varphi(z)| - 1) \leq d(z, J(P_c)) \leq \frac{4(|\varphi(z)| - 1)}{|\varphi'(z)|}.$$

ここで,  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  ( $A(\infty)$  上広義一様収束) である. そのため  $n$  が十分大きければ, 次のように近似できる.

$$d(z, J(P_c)) \approx \frac{1}{|\varphi'_n(z)|} (|\varphi_n(z)| - 1).$$

さらに  $z_n = P_c^n(z)$ ,  $z'_n = (P_c^n)'(z)$  とし,  $|\varphi'_n(z)| - 1 \approx \log |\varphi_n(z)|$  と近似すると, 次が成り立つ.

$$\frac{|\varphi_n(z)| - 1}{|\varphi'_n(z)|} \approx \frac{\log |\varphi_n(z)|}{|\varphi'_n(z)|} = \frac{\frac{1}{2^n} \log |P_c^n(z)|}{\frac{1}{2^n} |P_c^n(z)|^{\frac{1}{2^n} - 1} |(P_c^n)'(z)|} = \frac{\log |z_n|}{|z_n|^{\frac{1}{2^n} - 1} |z'_n|}.$$

最後に  $|z_n|^{\frac{1}{2^n}} = |\varphi_n(z)| \rightarrow |\varphi(z)|$  であるから  $z_0$  が  $J(P_c)$  の近くを動くとするれば  $|z_n|^{\frac{1}{2^n}}$  は 1 に近い値になる. よってこの部分を無視し,  $n$  を十分大きくとるなら次が成り立つ.

$$d(z, J(P_c)) \approx \frac{|z_n| \log |z_n|}{|z'_n|}. \quad (1)$$

また,

$$z_{n+1} = P_c^{n+1}(z) = P_c(P_c^n(z)) = P_c(z_n) = z_n^2 + c,$$

$$z'_{n+1} = (P_c^{n+1})'(z) = P'_c(P_c^n(z)) \cdot (P_c^n)'(z) = P'_c(z_n) \cdot z'_n = 2z_n \cdot z'_n.$$

これにより, 次の漸化式を満たす.

$$\begin{aligned} z_0 &= z, & z_{n+1} &= z_n^2 + c \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ z'_0 &= 1, & z'_{n+1} &= 2z_n z'_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

以上より,  $A(\infty)$  の任意の点  $z$  から  $J(P_c)$  までの距離を評価できる.

#### アルゴリズム (距離限界法)

$\forall z \in J$  と初期化

**Step1** 新たな点  $z$  をとる.  $\tilde{z} := z$

**Step2** 反復計算

if  $\tilde{z} \notin J$  then **Step1**  $\wedge$

while  $count < \text{反復上限}$  and  $|\tilde{z}| < \text{大きな数}$  do

$\tilde{z} = \tilde{z}^2 + c$ ,  $count = count + 1$

end while

**Step3** 判定

if  $count = \text{反復上限}$  then  $z \in J$

else  $Dist := "z \text{ から } J \text{ までの距離}"$  を計算

if  $Dist < \varepsilon$  then  $z \in J$

else  $\Delta(z, Dist)$  の内部の各点  $\notin J$

end if

end if

**Step1**  $\wedge$

### 3.1 距離限界法による Julia 集合の描画

今回のテーマである距離限界法は Julia 集合の  $\varepsilon$ -近傍を描画することから、特に繊細な形状の Julia 集合では、他の Julia 集合の描画アルゴリズムである逆反復法及びレベルセット法に比して、鮮明に Julia 集合が描画できる (図 2,3). また、距離限界法では  $A(\infty)$  の点  $z_0$  に対し、 $z_0$  を中心とし  $d(z_0, J(P_c))$  に相当する半径をもつ円板の内部の点を一度に判定することが出来る。そのため大幅な計算の省略、時間の短縮が見込める。ただし、Böttcher の定理を用いているため、このアルゴリズムを適用できるのは連結な Julia 集合をもつ 2 次多項式のみである。

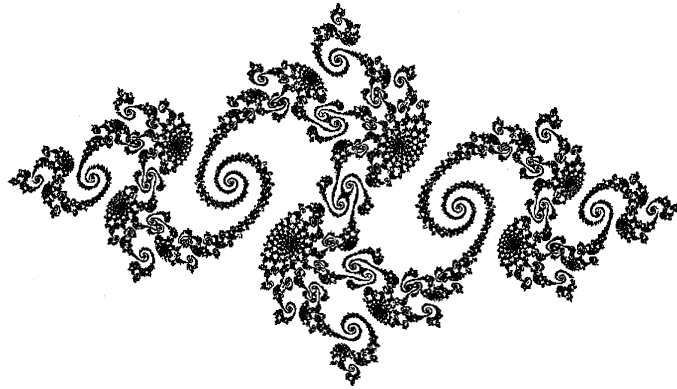
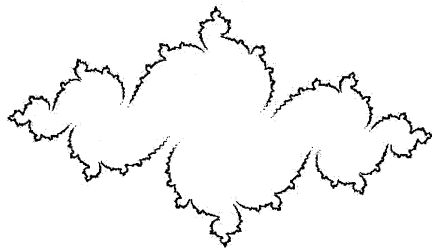
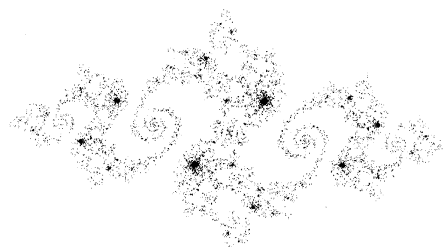


図 2: 距離限界法による Julia 集合 ( $P_c(z) = z^2 + c$ ,  $c = -0.770827 + 0.115528i$ )



逆反復法



レベルセット法

図 3: アルゴリズムの比較 ( $P_c(z) = z^2 + c$ ,  $c = -0.770827 + 0.115528i$ )

## 4 アルゴリズムの拡張

この章では距離限界法を応用し、Böttcher 写像による等角写像族における  $A(\infty)$  の像の描画について考察する。さらに、2 次多項式の連結な Julia 集合の描画アルゴリズムである距離限界法を、非連結及び高次多項式の Julia 集合に応用した例を紹介するとともに、高次多項式における等角写像族による  $A(\infty)$  の像の描画に関する考察を加える。

### 4.1 距離限界法による等角写像 $\varphi_m$ の描画

距離限界法の描画アルゴリズムを応用し、Böttcher の定理による等角写像族  $\varphi_m$  における  $A(\infty)$  の像の鮮明な描画を試みる。すなわち  $\varphi_m(A(\infty))$  の任意の点から  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \varphi_m(A(\infty))$  までの距離を評価し、描画する

方法について考察する.

アルゴリズムは次の方法で構成できる. まず Böttcher の定理により  $n \geq m$  として次の可換図が成り立つ.

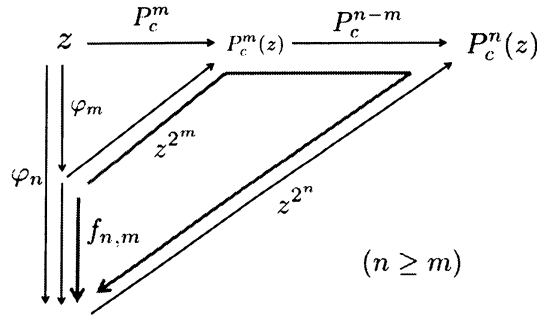


図 4: Böttcher の定理による可換図

可換図により, 次の式が成り立つことがわかる.

$$\begin{aligned} f_{n,m}(z) &= (P_c^{n-m}(z^{2^m}))^{\frac{1}{2^n}}, \\ f'_{n,m}(z) &= \frac{1}{2^n} ((P_c^{n-m}(z^{2^m}))^{\frac{1}{2^n}-1} (P_c^{n-m}(z^{2^m}))'). \end{aligned}$$

また,  $f_{n,m} = \varphi_m^{-1} \circ \varphi_n$  は等角写像となっており,  $f_{n,m}$  に Kőbe の  $\frac{1}{4}$  円定理を用いれば,

$$d(z, \partial(\varphi_m(A(\infty)))) \approx \frac{1}{|f'_{n,m}(z)|} (|f_{n,m}(z)| - 1).$$

ここで,  $z_n = P_c^{n-m}(z^{2^m})$ ,  $z'_n = (P_c^{n-m}(z^{2^m}))'$  として, さらに  $|f_{n,m}(z)| - 1 \approx \log |f_{n,m}(z)|$  と近似すると,

$$\frac{1}{|f'_{n,m}(z)|} (|f_{n,m}(z)| - 1) \approx \frac{|P_c^{n-m}(z^{2^m})| \log |P_c^{n-m}(z^{2^m})|}{|P_c^{n-m}(z^{2^m})|^{\frac{1}{2^n}} |(P_c^{n-m}(z^{2^m}))'|} = \frac{|z_n| \log |z_n|}{|z_n|^{\frac{1}{2^n}} |z'_n|}.$$

従って  $z$  が  $\mathbb{C} \setminus \varphi_m(A(\infty))$  の境界の近くを動くとなれば,  $|z_n|^{\frac{1}{2^n}} = |f_{n,m}(z)|$  は 1 に近い値になる. よってこの部分を見捨て,  $n$  を十分に大きくとるなら, 次の式で距離を評価できる.

$$d(z, \partial(\varphi_m(A(\infty)))) \approx \frac{1}{|f'_{n,m}(z)|} (|f_{n,m}(z)| - 1) \approx \frac{|z_n|}{|z'_n|} \log |z_n|.$$

さらに,

$$z_{n+1} = P_c^{n-m+1}(z^{2^m}) = P_c(P_c^{n-m}(z^{2^m})) = P_c(z_n) = z_n^2 + c,$$

$$z'_{n+1} = (P_c^{n-m+1}(z^{2^m}))' = (P_c(P_c^{n-m}(z^{2^m})))' = P'_c(P_c^{n-m}(z^{2^m})) \cdot (P_c^{n-m}(z^{2^m}))' = P'_c(z_n) z'_n = 2z_n z'_n.$$

ただし, 漸化式は  $n = m$  から始まり, 初期値は  $z_m = z^{2^m}$ ,  $z'_m = (P_c^0(z^{2^m}))' = (z^{2^m})' = 2^m \cdot z^{2^m-1}$  である. これにより次の漸化式を満たす.

$$\begin{aligned} z_m &= z^{2^m}, & z_{n+1} &= z_n^2 + c \quad (n = m, m+1, m+2, \dots), \\ z'_m &= 2^m z^{2^m-1}, & z'_{n+1} &= 2z_n z'_n \quad (n = m, m+1, m+2, \dots). \end{aligned}$$

結果として, Julia 集合の等角写像  $\varphi_m$  による像を描画する場合には, 3 章における Y. Fisher のアルゴリズムにおいて反復計算の前に  $z = z^{2^m}$ ,  $z' = 2^m z^{2^m-1}$  とする操作を追加すればよいことがわかる. 従って距離限界法のアルゴリズムは次のように書き換えられる.

—— アルゴリズム (Julia 集合の等角写像  $\varphi_m$  による像を描画する場合) ——

$\forall z \in J$  と初期化

Step1 新たな点  $z$  をとる.  $\tilde{z} := z$

Step2  $\tilde{z} = \tilde{z}^{2^m}$

Step3 反復計算

if  $\tilde{z} \notin J$  then Step1  $\wedge$

while  $count < \text{反復上限}$  and  $|\tilde{z}| < \text{大きな数}$  do

$\tilde{z} = \tilde{z}^2 + c$ ,  $count = count + 1$

end while

Step4 判定

if  $count = \text{反復上限}$  then  $z \in J$

else  $Dist := "z \text{ から } J \text{ までの距離}"$  を計算

if  $Dist < \varepsilon$  then  $z \in J$

else  $\Delta(z, Dist)$  の内部の各点  $\notin J$

end if

end if

Step1  $\wedge$

実際に描画した一例を紹介する (図 5, 6, 7).

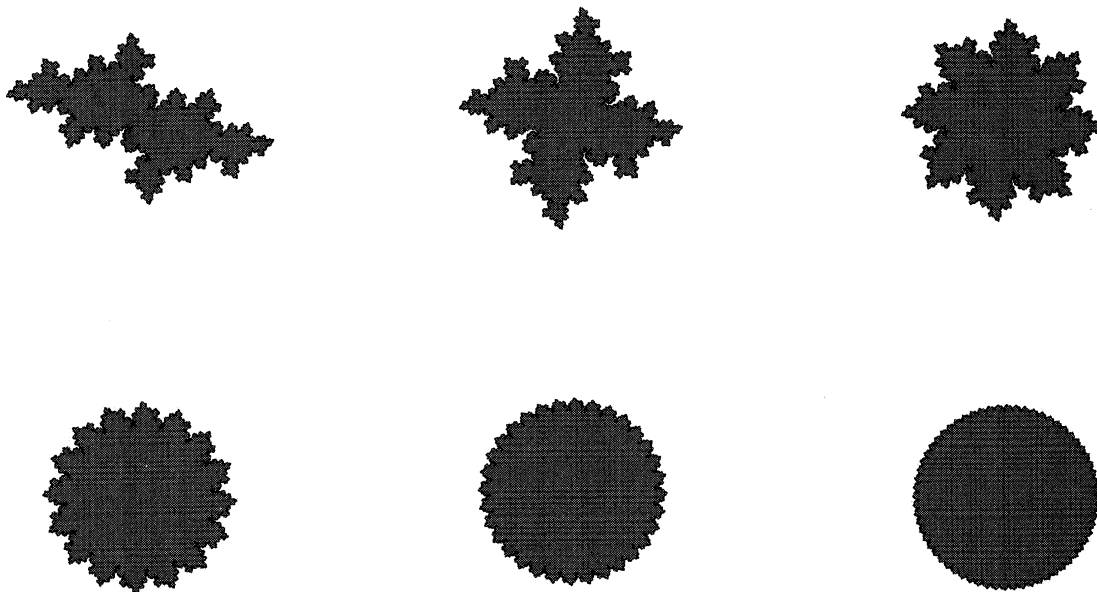


図 5: 無限遠点の吸引鉢  $A(\infty)$  の  $\varphi_n$  ( $0 \leq n \leq 5$ ) による像.  $n$  が大になると単位円板の外側に収束する様子が観察できる. ( $P_c(z) = z^2 + c$ ,  $c = -0.59 + 0.43i$ )



等角写像が  $\varphi_0$  の場合は Julia 集合の外側  $A(\infty)$  から元の Julia 集合の外側  $A(\infty)$  への恒等写像になっている。それ以降については等角写像  $\varphi_n$  により, Julia 集合の外側から単位円板の外側への等角写像に徐々に近づいていく様子が観察できる (図 5)。

また複雑な輪郭をもつ Julia 集合に関しても等角写像の構成が可能である。ただし, 計算機の計算精度及び計算回数の制約により, 十分に描画できない場合がある (図 6)。ここでは計算精度を 1000 桁, 反復合成の回数の上限を 10000 回に設定している (図 5, 6, 7)。計算精度及び計算回数をさらに高めることにより, より正確に描画することが可能ではある。しかし, 当然ながら描画のための計算時間は増化する。特に  $\varphi_n$  における  $n$  の値を大きくするに従い, それは顕著に現われる。

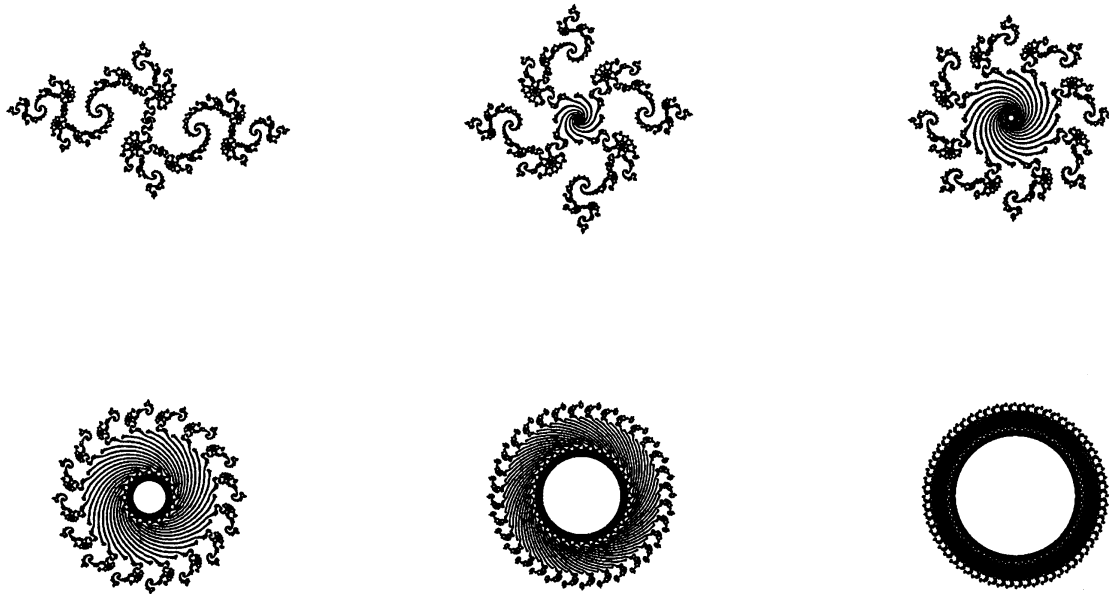


図 6:  $\varphi_n$  ( $0 \leq n \leq 5$ ) による像: このように, 連結な Julia 集合であってもパラメータによっては, 計算機の計算精度や反復回数の制約から正しく描画できない場合がある. ( $P_c(z) = z^2 + c$ ,  $c = -0.81088147357583255 - 0.20559409492254319i$ )

最後にデンドライトと呼ばれる Julia 集合をもつ 2 次多項式  $P_i = z^2 + i$  についても同様に描画を行う。等角写像  $\varphi_n$  の像が無数の線状に変化する様子が観察できる (図 7)。特にデンドライトには内点がないので, 画面上の点において Julia 集合の点か否かを判定するレベルセット法では十分に描画できないが, 距離限界法を応用した手法を用いれば, このような場合でも十分に描画できる。

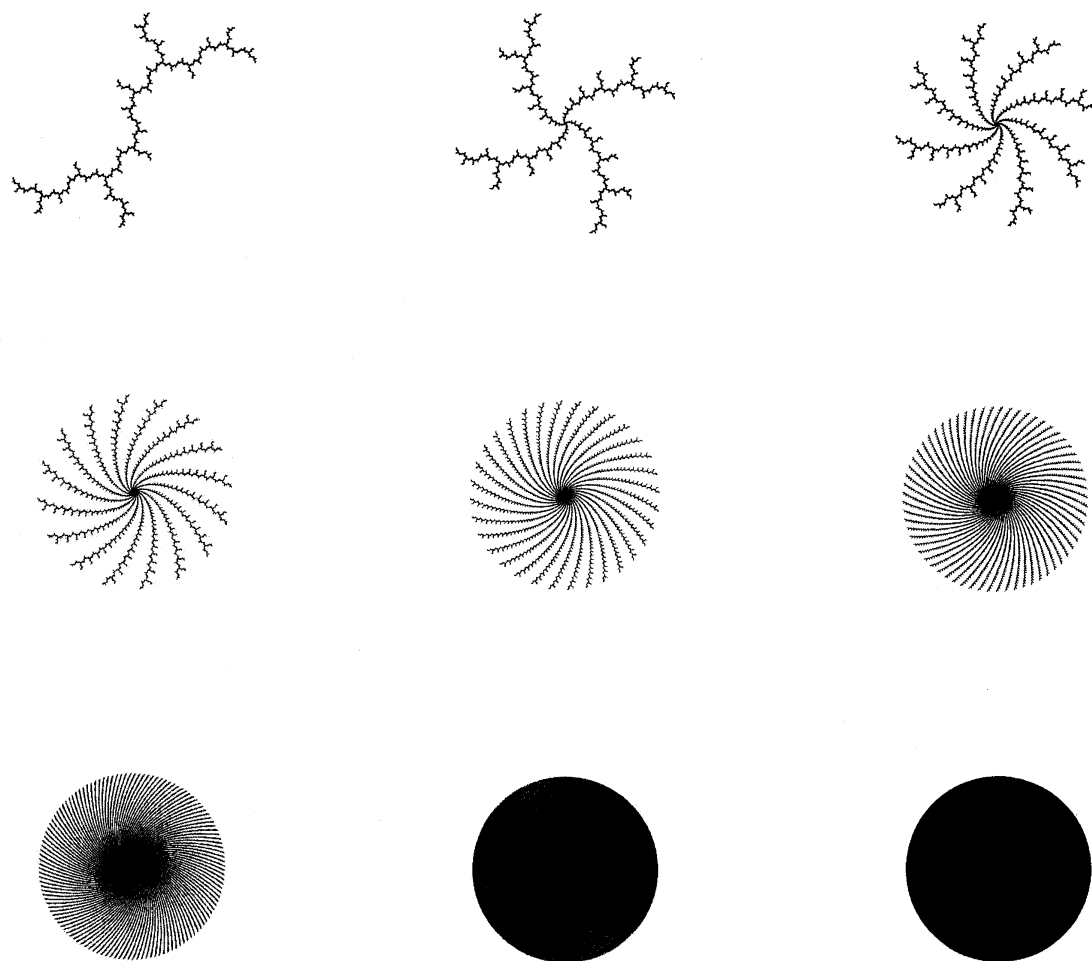


図 7:  $\varphi_n$  ( $0 \leq n \leq 8$ ) による像: デンドライト ( $P_c(z) = z^2 + c$ ,  $c = i$ ) の場合

デンドライトの等角写像  $\varphi_8$  の像の一部を拡大した場合でも像の輪郭が正しく描画され, 無数の線状で単位円板の内部が埋められている様子が観察できる (図 8).

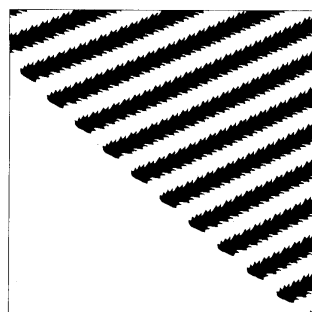


図 8: 図 7 右下図 ( $\varphi_8$ ) の一部の拡大 ( $-0.7 \leq \operatorname{Re} z \leq -0.6$ ,  $-0.8 \leq \operatorname{Im} z \leq -0.7$ )

## 4.2 非連結な Julia 集合の描画アルゴリズム

本来, 連結な Julia 集合の描画アルゴリズムである距離限界法を非連結な Julia 集合の場合に応用した例を紹介する.

距離限界法を用いて非連結な Julia 集合の描画を試みる際の問題点は,  $z$  及び  $z$  の軌道が  $P_c$  の特異点 0 を含む場合, 前述のアルゴリズムにおける距離の評価式が適用出来ないことである ((1) 式で分母  $|z'_n|$  が 0 になる). しかし, この場合 0 は  $A(\infty)$  に含まれる. そのため評価式の分母である  $|z'_n|$  が十分に小さい値をとる際は, Fatou 集合の点であると判定するとともに, 距離の評価による円板の大きさを全てピクセル単位に限定することにより, Julia 集合を描画することが可能になる.

### アルゴリズム (非連結な Julia 集合)

```

 $\forall z \in J$  と初期化
Step1 新たな点  $z$  をとる.  $\tilde{z} := z$ 
Step2 反復計算
    if  $\tilde{z} \notin J$  then Step1  $\wedge$ 
    while  $count < \text{反復上限}$  and  $|\tilde{z}| < \text{大きな数}$  do
         $\tilde{z} = \tilde{z}^2 + c$ ,  $count = count + 1$ 
    end while
Step3 判定
    if  $|\tilde{z}'| < \varepsilon$  then  $z \notin J$ 
    else if  $count < \text{反復上限}$ 
        then  $Dist := \text{"} z \text{ から } J \text{ までの距離"}$  を計算
            if  $Dist < \varepsilon$  then  $z \in J$ 
        end if
    end if
    Step1  $\wedge$ 

```

このアルゴリズムを用いて非連結な Julia 集合を描画した例を示す (図 9).

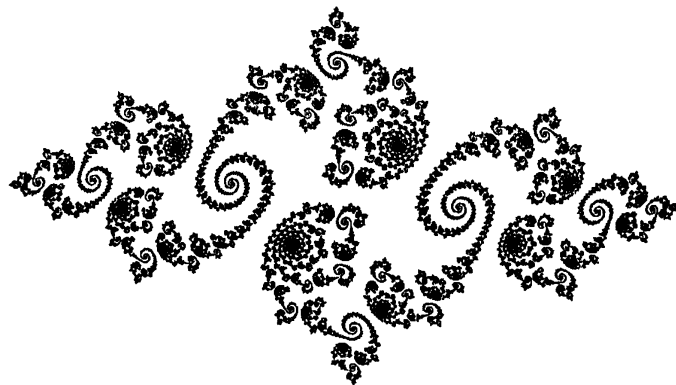


図 9: 非連結な Julia 集合の例 ( $P_c(z) = z^2 + c$ ,  $c = -0.770827 + 0.117729i$ )

連結な場合と同様に輪郭が鮮明に描画されている様子が観察できる。ただし、連結な Julia 集合の場合と異なり、画面上の全ての点において判定を行うため、全体としての計算の効率性は損なわれる。

### 4.3 高次多項式への応用

本来、2 次多項式の描画アルゴリズムである距離限界法を高次多項式に応用した例を示す。この場合にも Böttcher 写像に収束する等角写像族による  $A(\infty)$  の像の鮮明な描画が可能である。アルゴリズムで用いる漸化式は 2 次多項式の場合の評価式と同様の方法で導き出せる。

#### 4.3.1 3 次多項式の Julia 集合

3 次多項式の場合も Böttcher の定理を変形することにより 2 次多項式とほぼ同様な方法で評価式を得ることができる。また、任意の 3 次多項式は  $z^3 + az + b$  の形の 3 次多項式と共役である。そのため、このとき求める漸化式は次のようになる。

$$\begin{aligned} z_0 &= z, & z_{n+1} &= z_n^3 + az_n + b \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ z'_0 &= 1, & z'_{n+1} &= (3z_n^2 + a)z'_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

また、アルゴリズムについても 2 次多項式の場合とほぼ同様に、次のようになる。

#### アルゴリズム (3 次多項式の場合)

$\forall z \in J$  と初期化

**Step1** 新たな点  $z$  をとる。  $\tilde{z} := z$

**Step2** 反復計算

if  $\tilde{z} \notin J$  then **Step1**  $\wedge$

while  $count < \text{反復上限}$  and  $|\tilde{z}| < \text{大きな数}$  do

$\tilde{z} = \tilde{z}^3 + a\tilde{z} + b, count = count + 1$

end while

**Step3** 判定

if  $count = \text{反復上限}$  then  $z \in J$

else  $Dist := \text{"} z \text{ から } J \text{ までの距離"}$  を計算

if  $Dist < \varepsilon$  then  $z \in J$

else  $\Delta(z, Dist)$  の内部の各点  $\notin J$

end if

end if

**Step1**  $\wedge$



図 10: 3 次多項式の Julia 集合 ( $F(z) = z^3 - 0.85z + 0.35i$ )

#### 4.3.2 5 次多項式の Julia 集合

さらに, 5 次多項式の場合においても同様であるので, 漸化式と描画例のみ記す.  $z^5 + az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$  の形の 5 次多項式に対し, 漸化式は次のようになる.

$$\begin{aligned} z_0 &= z, & z_{n+1} &= z_n^5 + az_n^4 + bz_n^3 + cz_n^2 + dz_n + e, & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ z'_0 &= 1, & z'_{n+1} &= (5z_n^4 + 4az_n^3 + 3bz_n^2 + 2cz_n + d)z'_n, & (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$



図 11: 5 次多項式の Julia 集合 ( $F(z) = z^5 + 0.7iz^4 + 0.7z^3 + 0.7iz^2 - 0.7z + 0.7i$ )

#### 4.4 高次多項式における Julia 集合の等角写像

2 次多項式のときと同様に前小節で例に挙げた 3 次及び 5 次多項式に対して Böttcher 写像に収束する等角写像族  $\varphi_n$  による  $A(\infty)$  の描画を行う.

#### 4.4.1 3次多項式における等角写像

2次多項式の場合と同様に, 等角写像  $\varphi_n$  により Julia 集合の外側  $A(\infty)$  から単位円板の外側への等角写像が徐々に描画されていく様子が観察できる (図 12). ただし, 3次多項式  $F$  においては Böttcher 写像  $\varphi$  は,

$$\varphi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F^n(z))^{\frac{1}{3^n}}$$

で表される. アルゴリズムのその他の部分については変更はない.

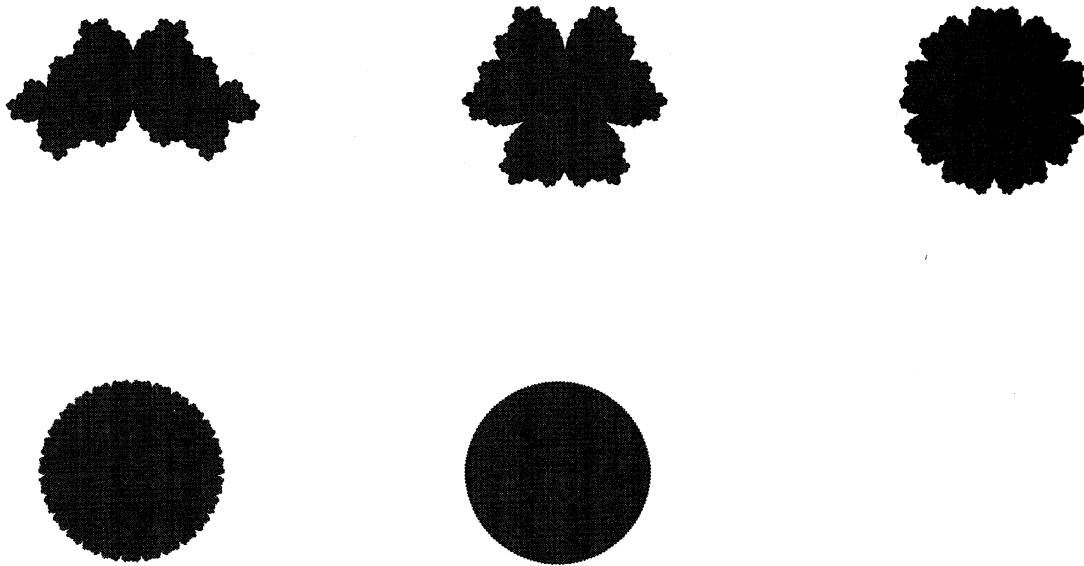


図 12:  $\varphi_n$  ( $0 \leq n \leq 4$ ) による像: 3次多項式の例 ( $F(z) = z^3 - 0.85z + 0.35i$ )

#### 4.4.2 5次多項式における等角写像

5次多項式  $F$  の場合に関しても, ほぼ同様に等角写像を構成できる. ただし, Böttcher 写像  $\varphi$  は,

$$\varphi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F^n(z))^{\frac{1}{5^n}}$$

で表される.

次数があがるにつれて計算回数が増大することから, 描画にかかる時間も大きく増加する. また, より高い計算精度も要求される.

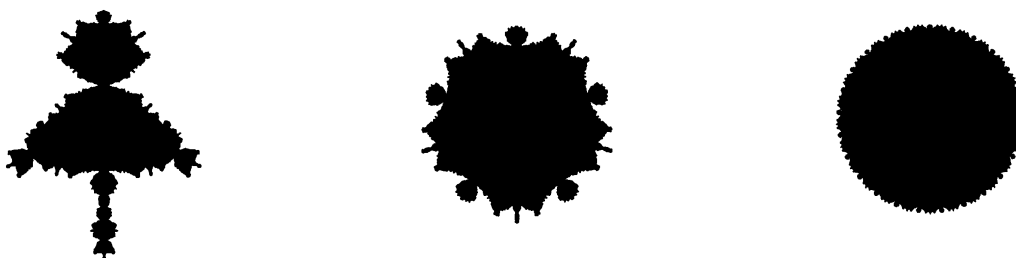


図 13:  $\varphi_n$  ( $0 \leq n \leq 2$ ) による像: 5 次多項式の例 ( $F(z) = z^5 + 0.7iz^4 + 0.7z^3 + 0.7iz^2 - 0.7z + 0.7i$ )

本稿では距離限界法による Julia 集合の描画アルゴリズムについて紹介及び実装を試みるとともに, 非連結及び高次多項式への応用, そして等角写像の族の描画に関する考察を行った. また, 今回紹介した距離限界法を用いた近接根の吸引鉢の描画アルゴリズムへの応用などが今後の研究課題である.

## 参 考 文 献

- [1] Alan F. Beardon, *Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems* GTM132., Springer Verlag (2000).
- [2] Lennart Carleson, Theodore. W. Gamelin, *Complex Dynamics* UTX, Springer Verlag (1993).
- [3] John Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Princeton University Press (2006).
- [4] Shunsuke Morosawa, Yasuichiro Nishimura, Masahiko Taniguchi, Tetsuo Ueda, *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press (2000).
- [5] Heinz-Otto Peitgen, et al., *The Science of Fractal Images*, Springer Verlag (1988).